2015年 東大理系数学 第3問

$y=f(x)=ax^p$, $y=g(x)=\log x$ とおく。

『$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x>0$ で共有点が1点のみ』

$\Updownarrow$

『$h(x)=f(x)-g(x)=0$ が $x>0$ で唯一の解を持つ』

2つのグラフを操うより、1つのグラフとx軸の方がやりやすい。

$h(x)=ax^p-\log x$ のグラフと、x軸の交点を考えるため、$y=h(x)$ のグラフを描く。

$$h'(x)=apx^{p-1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}(apx^p-1)$$

$x=(ap)^{-\frac{1}{p}}=\alpha$ とおく。

よって、増減表は、

x	0	$\cdots$	$(ap)^{-\frac{1}{p}}=\alpha$	$\cdots$	∞
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$ ☆	$\searrow$	$h(\alpha)$ ☆	$\nearrow$	$+\infty$ ☆

☆ $x\to 0$ の極限は、

$$\lim_{x\to+0}h(x)=\lim_{x\to+0}(ax^p-\log x)=+\infty$$

☆ $x\to+\infty$ の極限は、

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}(ax^p-\log x)$$

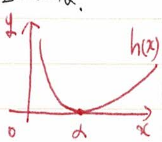
$$=\lim_{x\to+\infty}\log x\cdot\left(a\frac{x^p}{\log x}-1\right)=\infty$$

問題文の極限を使った

増減表から、

$h(x)=0$ が実数解を1つだけ持つためには、

$h(\alpha)=0$ が条件。 これなグラフ →



☆ $h(\alpha)$ を求めると、$\alpha=(ap)^{-\frac{1}{p}}$ より

$$h(\alpha)=a\cdot\left\{(ap)^{-\frac{1}{p}}\right\}^p-\log(ap)^{-\frac{1}{p}}$$

$$=a\cdot(ap)^{-1}+\frac{1}{p}\log ap$$

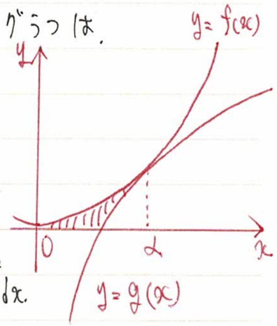
$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\log ap=0$$

$\therefore \log ap=-1$ より $a=\frac{1}{ep}$

$\alpha=(ap)^{-\frac{1}{p}}=e^{\frac{1}{p}}$

$a=\frac{1}{ep}$, Qのx座標 $e^{\frac{1}{p}}$

(2) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは、右の図のように接する。斜線部分をx軸の回りで回転させる。その体積をVとすると。



$$V=\int_0^\alpha \pi\{f(x)\}^2dx-\int_1^\alpha \pi\{g(x)\}^2dx$$

$$=\pi\int_0^\alpha (ax^p)^2dx-\pi\int_1^\alpha(\log x)^2dx.$$

$$\pi\int_0^\alpha(ax^p)^2dx=\pi a^2\left[\frac{1}{2p+1}x^{2p+1}\right]_0^\alpha=\frac{\pi a^2\alpha^{2p+1}}{2p+1}$$

$$=\frac{\pi e^{\frac{2p+1}{p}}}{e^2p^2(2p+1)}=\frac{\pi e^{\frac{1}{p}}}{p^2(2p+1)}$$

$$\pi\int_1^\alpha(\log x)^2dx=\pi\left[x(\log x)^2-2x\log x+2x\right]_1^\alpha$$

$$=\{\alpha(\log\alpha)^2-2\alpha\log\alpha+2\alpha-2\}\times\pi$$

$$=e^{\frac{1}{p}}\pi\left(\frac{1}{p^2}-\frac{2}{p}+2\right)-2\pi=\frac{\pi e^{\frac{1}{p}}(2p^2-2p+1)}{p^2}-2\pi$$

※ $\int\log x\,dx=x\log x-x+C$ ◀頻出、覚

$\int(\log x)^2dx=x(\log x)^2-\int x\cdot\frac{1}{x}\cdot 2\cdot\log x\,dx$ を使った。

よって、

$$V=\frac{\pi e^{\frac{1}{p}}}{p^2(2p+1)}-\left\{\frac{\pi e^{\frac{1}{p}}(2p^2-2p+1)}{p^2}-2\pi\right\}$$

$$\cdots=\frac{-4p^3-2p^2}{p^2(2p+1)}\pi e^{\frac{1}{p}}+2\pi=-\frac{2(2p-1)}{2p+1}\pi e^{\frac{1}{p}}+2\pi$$

(3) $-\frac{2(2p-1)}{2p+1}\pi e^{\frac{1}{p}}+2\pi=2\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{2(2p-1)}{2p+1}\pi e^{\frac{1}{p}}=0$ 　 $2p-1=0$ より $p=\frac{1}{2}$